1　特性関数とキュミュラント

1.1　準備

以下の計算等において，次の式が成り立つことを利用する.

- 期待値 $E(X)$ の性質:$E(X+Y)=E(X)+E(Y),\quad E(aX+b)=aE(X)+b$
- 指数関数のべき級数展開式: $e^x=1+\dfrac{1}{1!}x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\cdots$
- 確率積分:$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{a}{2}u^2}du=\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$

1.2　特性関数 $\hat{f}\left(\xi\right)$ の定義

離散型の確率関数 $p(x)$，および連続型の確率密度関数 $f(x)$ のそれぞれに対し，その特性関数 $\hat{f}\left(\xi\right)$ を次の式で定義する.

$$\hat{f}\left(\xi\right)=E\left(e^{i\xi x}\right)=\begin{cases}\displaystyle\sum_x e^{i\xi x}\cdot p(x) & (\text{離散型})\\[2ex] \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}\cdot f(x)dx & (\text{連続型})\end{cases}$$

定義式より，$\hat{f}\left(0\right)=E\left(e^0\right)=E\left(1\right)=1$ であることに注意.

1.3 特性関数と $E\left(x^l\right)$ との一般的な関係

特性関数の定義式 $\hat{f}(\xi) = E\left(e^{i\xi x}\right)$ において，指数関数 $e^{i\xi x}$ の部分をべき級数展開し，さらに期待値の性質を用いて変形すると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= E\left(e^{i\xi x}\right) \\
&= E\left(1 + \frac{1}{1!}(i\xi x) + \frac{1}{2!}(i\xi x)^2 + \frac{1}{3!}(i\xi x)^3 + \cdots\right) \\
&= 1 + \frac{1}{1!}E(x)(i\xi) + \frac{1}{2!}E\left(x^2\right)(i\xi)^2 + \frac{1}{3!}E\left(x^3\right)(i\xi)^3 + \cdots \qquad (1)
\end{aligned}
$$

この式から分かる通り，この展開式の $(i\xi)^l$ の係数の部分に $E\left(x^l\right)$ が現れる．

したがって個々の確率関数や確率密度関数について，その特性関数をべき級数展開した式が具体的に求められれば，その係数を見ることにより，

$$
\begin{aligned}
&\text{平均 } \mu &&= E(x) \\
&\text{分散 } \sigma^2 &&= E\left((x-\mu)^2\right) = E\left(x^2\right) - \{E(x)\}^2
\end{aligned}
$$

などを求めることができる．

1.4 特性関数とキュミュラント

確率関数の特徴を知る方法としては，特性関数があれば十分である．しかしここでは，それをさらに別の形に表してみることを考える．

そこで特性関数 $\hat{f}(\xi)$ について，

- まず $x = \exp(\log x)$ の関係を用いて 1 つの指数関数の形に書き直し，
- 次にその指数に現れた対数関数をべき級数展開し，
- そのときの $(i\xi)^m$ の係数に注目する

ということを行う．すなわち，

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \exp\left(\log \hat{f}(\xi)\right) \\
&= \exp\left\{\frac{\kappa_1}{1!}(i\xi) + \frac{\kappa_2}{2!}(i\xi)^2 + \frac{\kappa_3}{3!}(i\xi)^3 + \cdots\right\}
\end{aligned}
$$

となる．指数の中に $i\xi$ に関する定数項が存在しないのは，$\log \hat{f}(0) = \log 1 = 0$ であることによる．

このときに現れた定数 κ_m $(m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を m 次のキュミュラントという．

1.5 キュミュラントと $E\left(x^l\right)$ との一般的な関係

この計算をさらに進める．具体的には，

- まず指数法則 $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ を用いて指数関数の積に変形し，
- 次にそれぞれの指数関数をべき級数展開する

ということを行う．すなわち，

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \exp\left(\frac{\kappa_1}{1!}(i\xi)\right)\cdot\exp\left(\frac{\kappa_2}{2!}(i\xi)^2\right)\cdot\exp\left(\frac{\kappa_3}{3!}(i\xi)^3\right)\cdots \\
&= \left\{1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{\kappa_1}{1!}(i\xi)+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{\kappa_1}{1!}(i\xi)\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\kappa_1}{1!}(i\xi)\right)^3+\cdots\right\} \\
&\quad \cdot\left\{1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{\kappa_2}{2!}(i\xi)^2+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{\kappa_2}{2!}(i\xi)^2\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\kappa_2}{2!}(i\xi)^2\right)^3+\cdots\right\} \\
&\quad \cdot\left\{1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{\kappa_3}{3!}(i\xi)^3+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{\kappa_3}{3!}(i\xi)^3\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\kappa_3}{3!}(i\xi)^3\right)^3+\cdots\right\}\cdots
\end{aligned}
\tag{2}
$$

式 (2) を普通の意味で展開したときに $i\xi$ の

$$
\begin{array}{ll}
1\,\text{次の係数} & \kappa_1 \\
2\,\text{次の係数} & \dfrac{1}{2!}\left({\kappa_1}^2+\kappa_2\right) \\
3\,\text{次の係数} & \dfrac{1}{3!}\left({\kappa_1}^3+3\kappa_1\kappa_2+\kappa_3\right)
\end{array}
$$

であると計算できる．したがって (1)，(2) の係数を比較して，

$$
\begin{aligned}
E(x) &= \kappa_1 \\
E(x^2) &= {\kappa_1}^2+\kappa_2 \\
E(x^3) &= {\kappa_1}^3+3\kappa_1\kappa_2+\kappa_3
\end{aligned}
$$

などが求められる．これを用いて一般に，

$$\text{平均}\quad \mu \equiv E(x) = \kappa_1$$

$$\text{分散}\quad \sigma^2 \equiv E\left((x-\mu)^2\right) = E\left(x^2\right) - \{E(x)\}^2 = \kappa_2$$

の関係があることがわかる．

1.6 まとめ

確率関数 $p(x)$ や確率密度関数 $f(x)$ において，その特性関数 $\hat{f}(\xi)$ を

$$\hat{f}(\xi) = E\left(e^{i\xi x}\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_x e^{i\xi x} \cdot p(x) & \text{(離散型)} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \cdot f(x) dx & \text{(連続型)} \end{cases}$$

によって定義するとき，$\hat{f}(\xi)$ は次のように表せる．

- $E\left(x^l\right)$ を用いた形

$$\hat{f}(\xi) = 1 + \frac{1}{1!} E(x)(i\xi) + \frac{1}{2!} E\left(x^2\right)(i\xi)^2 + \frac{1}{3!} E\left(x^3\right)(i\xi)^3 + \cdots$$

- キュミュラント κ_m を用いた形

$$\hat{f}(\xi) = \exp\left\{\frac{\kappa_1}{1!}(i\xi) + \frac{\kappa_2}{2!}(i\xi)^2 + \frac{\kappa_3}{3!}(i\xi)^3 + \cdots\right\}$$

特性関数を用いて，確率 (密度) 関数の平均や分散が次のように求められる．

平均　$\mu \equiv E(x) = \kappa_1$

分散　$\sigma^2 \equiv E\left((x-\mu)^2\right) = E\left(x^2\right) - \{E(x)\}^2 = \kappa_2$

2　二項分布

2.1　二項分布の特性関数

二項分布 $B(n,\ p)$ の確率関数 $p(x)$ は,

$$p(x) = {}_nC_x \cdot p^x (1-p)^{n-x}$$

で表される．よってその特性関数 $\hat{f}\,(\xi)$ を定義に従って具体的に計算すると,

$$\begin{aligned}\hat{f}\,(\xi) &= \sum_{x=0}^{n} e^{i\xi x} \cdot p(x) = \sum_{x=0}^{n} e^{i\xi x}{}_nC_x \cdot p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x \left(pe^{i\xi}\right)^x (1-p)^{n-x} = \left(1-p+pe^{i\xi}\right)^n\end{aligned}$$

となる．

2.2　二項分布の $E\left(x^l\right)$

次に，これをべき級数展開する．そこで $g(x) = (1-p+pe^x)^n$ とすると,

$$g^{(1)}(x) = n\,(1-p+pe^x)^{n-1} \cdot pe^x = np\,(1-p+pe^x)^{n-1}\, e^x$$

$$\begin{aligned}g^{(2)}(x) &= np\left\{(n-1)\,(1-p+pe^x)^{n-2} \cdot pe^x \cdot e^x + (1-p+pe^x)^{n-1} \cdot e^x\right\} \\ &= np\,(1-p+pe^x)^{n-2}\, e^x \left\{(n-1)pe^x + (1-p+pe^x)\right\} \\ &= np\,(1-p+pe^x)^{n-2}\, e^x\,(1-p+npe^x)\end{aligned}$$

であるから,

$$g(0) = 1,\quad g^{(1)}(0) = np,\quad g^{(2)}(0) = np(1-p+np)$$

である．したがって

$$\begin{aligned}g(x) &= g(0) + \frac{g^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{g^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots \\ &= 1 + \frac{np}{1!}x + \frac{np(1-p+np)}{2!}x^2 + \cdots\end{aligned}$$

$x = i\xi$ を代入すれば,

$$\hat{f}\,(\xi) = g\,(i\xi) = 1 + \frac{np}{1!}\,(i\xi) + \frac{np(1-p+np)}{2!}\,(i\xi)^2 + \cdots$$

したがって (1) により，

$$E\left(x\right)=np,\quad E\left(x^2\right)=np(1-p+np)$$

であり，さらにこれらを用いて

$$\begin{aligned}
E\left((x-\mu)^2\right) &= E\left(x^2\right)-\left\{E\left(x\right)\right\}^2 \\
&= np(1-p+np)-(np)^2 \\
&= np\left\{(1-p+np)-np\right\} \\
&= np(1-p)
\end{aligned}$$

であるから，二項分布 $B(n,\ p)$ について，

$$\text{平均 } \mu=np,\quad \text{分散 } \sigma^2=np(1-p)$$

であると分かる．

2.3 二項分布とキュムラント

次に二項分布 $B(n,\ p)$ のキュミュラントを計算する．特性関数 $\hat{f}\left(\xi\right)$ について，定義に従ってそのキュミュラントを求めることを考える．

$$\begin{aligned}
\hat{f}\left(\xi\right) &= \exp\left(\log \hat{f}\left(\xi\right)\right) \\
&= \exp\left\{\log\left(1-p+pe^x\right)^n\right\} \\
&= \exp\left\{n\log\left(1-p+pe^x\right)\right\}
\end{aligned}$$

ここで $g(x)=\log(1-p+pe^x)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
g^{(1)}(x) &= p\cdot\frac{e^x}{1-p+pe^x} \\
\\
g^{(2)}(x) &= p\cdot\frac{e^x(1-p+pe^x)-e^x\cdot pe^x}{(1-p+pe^x)^2} \\
&= p\cdot\frac{e^x(1-p+pe^x-pe^x)}{(1-p+pe^x)^2} \\
&= p(1-p)\cdot\frac{e^x}{(1-p+pe^x)^2} \\
\\
g^{(3)}(x) &= p(1-p)\cdot\frac{e^x\left(1-p+pe^x\right)^2-e^x\cdot 2pe^x\left(1-p+pe^x\right)}{(1-p+pe^x)^4} \\
&= p(1-p)\cdot\frac{e^x(1-p+pe^x-2pe^x)}{(1-p+pe^x)^3} \\
&= p(1-p)\cdot\frac{e^x(1-p-pe^x)}{(1-p+pe^x)^3}
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
g(0)=0,\quad g^{(1)}(0)=p,\quad g^{(2)}(0)=p(1-p),\quad g^{(3)}(0)=p(1-p)(1-2p)
$$

である．したがって

$$
\begin{aligned}
g(x) &= g(0)+\frac{g^{(1)}(0)}{1!}x+\frac{g^{(2)}(0)}{2!}x^2+\frac{g^{(3)}}{3!}x^3+\cdots \\
&= 0+\frac{p}{1!}x+\frac{p(1-p)}{2!}x^2+\frac{p(1-p)(1-2p)}{3!}x^3+\cdots
\end{aligned}
$$

これを用いて，

$$
\begin{aligned}
\hat{f}\left(\xi\right) &= \exp\left[n\left\{\frac{p}{1!}\left(i\xi\right)+\frac{p(1-p)}{2!}\left(i\xi\right)^2+\frac{p(1-p)(1-2p)}{3!}\left(i\xi\right)^3+\cdots\right\}\right] \\
&= \exp\left\{\frac{np}{1!}\left(i\xi\right)+\frac{np(1-p)}{2!}\left(i\xi\right)^2+\frac{np(1-p)(1-2p)}{3!}\left(i\xi\right)^3+\cdots\right\}
\end{aligned}
$$

と求められる．当然この式からも，

$$
\text{平均 } \mu=\kappa_1=np,\quad \text{分散 } \sigma^2=\kappa_2=np(1-p)
$$

が求められる．

2.4　まとめ

二項分布 $B(n,\ p)$ において，その特性関数 $\hat{f}\,(\xi)$ は次の式で表される．

- $E\left(x^l\right)$ を用いた形

$$\hat{f}\,(\xi) = 1 + \frac{np}{1!}\,(i\xi) + \frac{np(1-p+np)}{2!}\,(i\xi)^2 + \cdots$$

- キュミュラント κ_m を用いた形

$$\hat{f}\,(\xi) = \exp\left\{\frac{np}{1!}\,(i\xi) + \frac{np(1-p)}{2!}\,(i\xi)^2 + \frac{np(1-p)(1-2p)}{3!}\,(i\xi)^3 + \cdots\right\}$$

二項分布 $B(n,\ p)$ について，

$$\text{平均}\ \mu = np,\quad \text{分散}\ \sigma^2 = np(1-p)$$

である．

3 正規分布

3.1 正規分布の特性関数

正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ の確率密度関数は,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

で表される．よってその特性関数 $\hat{f}\,(\xi)$ を定義に従って具体的に計算すると,

$$\begin{aligned}
\hat{f}\,(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \cdot f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-\mu-\sigma^2 i\xi\right)^2 + \mu i\xi + \frac{1}{2}\sigma^2 (i\xi)^2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\mu i\xi + \frac{1}{2}\sigma^2 (i\xi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-\mu-\sigma^2 i\xi\right)^2} dx
\end{aligned}$$

ただし 2 行目から 3 行目へは，指数法則 $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ を用いて 1 つの指数関数にまとめ，その後指数を x について平方完成した.

ここで $x - \mu - \sigma^2 i\xi = u$ と置換して積分の箇所は,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x-\mu-\sigma^2 i\xi\right)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = \sqrt{2\pi\sigma^2}$$

と求められる．したがって,

$$\hat{f}\,(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\mu i\xi + \frac{1}{2}\sigma^2 (i\xi)^2} \cdot \sqrt{2\pi\sigma^2} = e^{\mu i\xi + \frac{1}{2}\sigma^2 (i\xi)^2}$$

である．これはすでにキュミュラントが求められる形になっており，実際

$$\text{平均}\ \kappa_1 = \mu,\quad \text{分散}\ \kappa_2 = \sigma^2$$

である．そしてさらに正規分布は，**「3 次以上のキュミュラントがすべて 0」**という大きな特徴を持つ分布であることも分かる.

3.2 二項分布の正規分布による近似

二項分布 $B(n,\ p)$ の特性関数をキュミュラントを用いて表した式

$$\hat{f}\,(\xi) = \exp\left\{ \frac{np}{1!}\,(i\xi) + \frac{np(1-p)}{2!}\,(i\xi)^2 + \frac{np(1-p)(1-2p)}{3!}\,(i\xi)^3 + \cdots \right\}$$

において，$p \sim \dfrac{1}{2}$ とすると，3次以上が無視できて，

$$\hat{f}(\xi) \sim \exp\left\{\frac{np}{1!}(i\xi) + \frac{np(1-p)}{2!}(i\xi)^2\right\}$$

と表せる．これは二項分布 $B(n,\ p)$ が正規分布 $N(np,\ np(1-p))$ に近似できることを意味する．実用上は $np > 5,\ n(1-p) > 5$ ならばこの近似を用いてよいと言われている．

3.3 まとめ

正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ において，その特性関数 $\hat{f}(\xi)$ は，キュミュラント κ_m を用いた次の式で表される．

$$\hat{f}(\xi) = e^{\mu i\xi + \frac{1}{2}\sigma^2 (i\xi)^2}$$

正規分布は，3次以上のキュミュラントがすべて0という大きな特徴を持つ．

正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ について，

$$\text{平均 } \kappa_1 = \mu,\quad \text{分散 } \kappa_2 = \sigma^2$$

である．

二項分布 $B(n,\ p)$ は，正規分布 $N(np,\ np(1-p))$ に近似できる．